

Classification of locally standard T -pseudomanifolds over convex polytopes

岡山理科大学大学院 理工学研究科 自然科学専攻 数理科学コース
小池悠耶 (Yuya KOIKE) *

概要

トーリックトポロジーは、1991 年の Davis と Januszkiewicz による研究を契機として発展してきた。彼らによって導入された擬トーリック多様体は、特性対と呼ばれる組合せ論的対象によって、同変同相型が分類されることが知られている。本講演では、擬トーリック多様体を一般化する概念として、凸多面体上の locally standard T -pseudomanifold を導入し、(弱) 同変同相による分類定理を与える。これは、擬トーリック多様体に対する Davis と Januszkiewicz の分類を拡張するものである。本講演は黒木慎太郎氏との共同研究に基づく。

1 はじめに

トーリックトポロジーでは、トーラス作用を用いて空間を調べ、そのトポジカルな性質と組合せ論との関係を明らかにする研究が盛んに行われてきた。この枠組みにより、トポロジーの問題や結果を組合せ論的な観点から理解することができ、またその逆の視点も有効である。従来のトーリックトポロジーにおいては、滑らかなトーラス作用を持つ多様体や、比較的扱いやすい特異点を持つ軌道体 (orbifold) を対象とすることが主であった（本稿における特異点とは、Euclid 空間と同相な近傍を持たない点、すなわち位相多様体としての構造が崩れる点を指す）。そのため、軌道空間として現れる凸多面体は、単純凸多面体という特別なクラスに限られていた。

これに対し、講演者らは [KK26] において、より一般の特異点を許容する locally standard T -pseudomanifold を導入し、その同変同相型の分類について調べた。このクラスの特徴は、従来のトーリックトポロジーでは現れなかった一般的の凸多面体が、軌道空間として現れる点にある。本稿では簡単のため、軌道空間が凸多面体となる場合に焦点を当てて紹介する。なお、従来のトーリックトポロジーではトーラスの滑らかな作用を議論することが主であったが、本研究では連続作用を扱う。具体的には、連続なトーラス作用を持つ、第二可算公理を満たすコンパクト Hausdorff 空間を対象とする。

2 擬トーリック多様体

この章では、Davis と Januszkiewicz が [DJ91] で導入した擬トーリック多様体の定義と、特性対との対応を述べる。

* E-mail:r24nms3ac@ous.jp

2.1 擬トーリック多様体の定義

以下, $T^n \cong U(1)^n$ を n 次元トーラスとする. ここで, $U(1) \subset \mathbb{C}$ は単位円周である. 文脈から次元が明らかな場合は, T^n を単に T と表記する. $U(1)^n$ は次のようにして, \mathbb{C}^n に作用する: $(t_1, \dots, t_n) \in U(1)^n, (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (t_1 z_1, \dots, t_n z_n).$$

すなわち, 各成分ごとの積による作用である. この作用を**標準作用** (standard action) と呼ぶ. 以下, \mathbb{C}^n およびその $U(1)^n$ 不変部分集合については, 常にこの作用を考えるものとする. 次に, **局所標準作用** (locally standard action) を定義する.

定義 2.1 (局所標準作用). M は $2n$ 次元の可微分多様体であり, 滑らかな T^n 作用を持つものとする. M 上の T 作用が**局所標準的** (locally standard) であるとは, 各 $x \in M$ に対し, x の T 不変な開近傍 $U \subset M$ であって, ある $U(1)^n$ 不変な開集合 $V \subset \mathbb{C}^n$ に弱同変同相であるものが取れるときをいう.

M 上の T 作用が局所標準的であるとき, 軌道空間 M/T は n 次元の角付き多様体の構造をもつことが知られている.

次に, 単純凸多面体と呼ばれる特別な凸多面体を定義する. 凸多面体については, [Zie96] 等を参照されたい.

定義 2.2 (単純凸多面体). n 次元凸多面体が**単純** (simple polytope) であるとは, 各頂点がちょうど n 個のファセット (余次元 1 の面) に含まれるときをいう.

単純凸多面体は角付き多様体とみなせることに注意されたい. 以上の準備の下, 擬トーリック多様体は次のように定義される.

定義 2.3 (擬トーリック多様体). T の M 上への作用が局所標準的であり, 軌道空間 M/T が角付き多様体として単純凸多面体 P と同相であるとき, M を P 上の**擬トーリック多様体** (quasitoric manifold) という.

2.2 特性対による分類

本節では, 擬トーリック多様体が**特性対**と呼ばれる組合せ論的対象と対応することを, 厳密な証明を省き簡潔に述べる. 本節の内容は [DJ91]に基づいている.

P を n 次元単純凸多面体, M を $2n$ 次元擬トーリック多様体とし, $\pi : M \rightarrow P$ を軌道射影とする. P のファセットの集合を $\{F_1, \dots, F_m\}$ で表す. 各ファセット F_i の逆像

$$M_i := \pi^{-1}(F_i)$$

は $T/T_{F_i} \cong T^{n-1}$ 作用をもつ F_i 上の $2(n-1)$ 次元擬トーリック多様体になる. ここで, $T_{F_i} \subset T$ は M_i を固定する円周部分群 (ランク 1 の部分トーラス) である. 円周部分群 T_{F_i} は原始的なベクトル

$\mu_i \in \mathbb{Z}^n$ により決定され, μ_i は符号を除いて一意である. このようにして, 各ファセット F_i に対して μ_i の符号を指定することで, 関数

$$\begin{array}{ccc} \mu : & \{F_1, \dots, F_m\} & \rightarrow \mathbb{Z}^n \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & F_i & \mapsto \mu_i \end{array}$$

が定まる. これを擬トーリック多様体 M の特性関数と呼ぶ. 事実として, M の特性関数は次の性質を満たす.

条件 2.4. $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$ のとき, $\mu(F_{i_1}), \dots, \mu(F_{i_k})$ は \mathbb{Z}^n の基底の一部をなす.

この性質をもとに, M の特性関数を組合せ論的に定義し直したものが単純凸多面体 P 上の特性関数である.

定義 2.5 (単純凸多面体上の特性関数). n 次元単純凸多面体 P のファセットの集合を $\{F_1, \dots, F_m\}$ とする. 関数 $\mu : \{F_1, \dots, F_m\} \rightarrow \mathbb{Z}^n$ が条件 2.4 を満たすとき, μ を P 上の特性関数と呼び, (P, μ) を特性対と呼ぶ.

特性対 (P, μ) が与えられたとき, 標準モデルと呼ばれる T 作用を持つ空間を構成できる.

定義 2.6 (標準モデル). 標準モデル $M(P, \mu)$ を, 次の商位相空間として定義する:

$$M(P, \mu) := P \times T^n / \sim.$$

ここで, 同値関係 \sim は次のように定める. $P \times T^n$ の 2 点 $(p, t), (q, s)$ が同値であるとは, $p = q$ であり, かつ p を相対内部に含む面 F に対して, $t^{-1}s \in T_F$ が成り立つときをいう. ここで, $T_F \subset T^n$ は, $F = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ と表されるとき, $\mu(F_{i_1}), \dots, \mu(F_{i_k})$ で張られる部分トーラスである. なお, p が P の内部にある場合 (すなわち, $F = P$ のとき) は, $T_P = \{1\}$ とする. $M(P, \mu)$ 上の T^n 作用は, T^n への掛け算から誘導されるものと定める.

注意 2.7. 面をファセットの共通部分として表した $F = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ という表示は, P が単純であることから一意である.

最後に, 擬トーリック多様体と特性対の対応について述べる.

定理 2.8. P を単純凸多面体とする.

- μ を P 上の特性関数とするとき, 標準モデル $M(P, \mu)$ は P 上の擬トーリック多様体である.
- M を P 上の擬トーリック多様体とし, μ を M の特性関数とする. このとき, M と標準モデル $M(P, \mu)$ は同変同相である.

注意 2.9. [PS10] では, 擬トーリック多様体を拡張した擬トーリック軌道体 (quasitoric orbifold) と呼ばれるクラスが研究されている. このクラスにおいても, 軌道空間は単純凸多面体であり, 特性対が定義され同様の対応が成り立つ. その際の特性関数の条件は, 条件 2.4 における「 \mathbb{Z}^n の基底の一部」という部分を「 \mathbb{Z} 上一次独立」に変更したものである.

3 凸多面体上の locally standard T -pseudomanifold

この章では、講演者らが [KK26] で導入した **locally standard T -pseudomanifold** のうち、軌道空間が凸多面体である場合について述べる。この章の目的は、凸多面体上の locally standard T -pseudomanifold の同変同相型が、軌道空間である凸多面体と、特性関数を拡張した**特性関手**の組によって分類できることを述べることである。

以下で述べる open cone ([Max19]) は locally standard T -pseudomanifold 定義に用いられる。

定義 3.1 (open cone). L をコンパクト Hausdorff 空間とする。 L の **open cone** を次のように定義する:

$$\mathring{c}(L) := L \times [0, 1) / (L \times \{0\}).$$

すなわち、 $\mathring{c}(L)$ は $L \times [0, 1)$ の部分空間 $L \times \{0\}$ を 1 点に潰すことによって得られる商空間である。また、 $\mathring{c}(\emptyset)$ は 1 点であるとする。

3.1 Locally standard T -pseudomanifold の定義

X を第二可算公理を満たすコンパクト Hausdorff 空間とし、 T^m が連続に作用しているとする。このとき、 $n \geq 0$, $m \geq n$ に対して、次の X の部分集合を定義する: $0 \leq i \leq n$ に対して、

$$X_{2i+1+(m-n)} = X_{2i+(m-n)} := \{x \in X \mid \dim T(x) \leq i + (m - n)\}.$$

ここで、 $T(x)$ は $x \in X$ を通る T 軌道を表す。また、 $i = -1$ のときは空集合、すなわち、

$$X_{(m-n)-1} = X_{(m-n)-2} := \{x \in X \mid \dim T(x) \leq (m - n) - 1\} = \emptyset$$

であると約束する。 T 作用は X 上に次のような部分集合の列を誘導する:

$$\mathfrak{X} : X = X_{m+n} \supset X_{2(n-1)+(m-n)} \supset \cdots \supset X_{2i+(m-n)} \supset \cdots \supset X_{m-n} \supset \emptyset.$$

この部分集合の列 \mathfrak{X} を**軌道の次元によるフィルトレーション**と呼ぶ。

条件 3.2. 次の 3 条件を仮定する:

- 各 $x \in X$ のアイソトロピー部分群 T_x は部分トーラス（すなわち、 T の連結な閉部分群）；
- $0 \leq i \leq n$ に対して、各 $X_{2i+(m-n)} \setminus X_{2(i-1)+(m-n)}$ の連結成分は $(2i + (m - n))$ 次元の位相多様体；
- $n > 0$ のとき、 $X_{m+n} \supsetneq X_{m+n-2}$ (X は自由軌道を持ち、作用は効果的)。

各 $0 \leq i \leq n$ に対して、 $X_{2i+(m-n)}$ は T 不変であるから、軌道射影 $\pi : X \rightarrow Q := X/T$ は軌道空間 Q に次のフィルトレーション $\mathfrak{X}/T = \mathfrak{Q}$ を誘導する:

$$\mathfrak{X}/T = \mathfrak{Q} : Q = Q_n \supset Q_{n-1} \supset \cdots \supset Q_i \supset \cdots \supset Q_0 \supset \emptyset.$$

ただし、 $Q_i := X_{2i+1+(m-n)}/T = X_{2i+(m-n)}/T$ である。このフィルトレーションを備えた軌道空間を (Q, \mathfrak{Q}) で表す。本稿では簡単のため、 (Q, \mathfrak{Q}) は次の条件を満たすものを考える。

条件 3.3. ある n 次元凸多面体 P と, (Q, \mathfrak{Q}) から (P, \mathfrak{P}) へのフィルトレーションを保つ同相写像 $f: Q \rightarrow P$ が存在する. ここで \mathfrak{P} は次で定義されるフィルトレーションである:

$$\mathfrak{P}: P \supset \bigcup_{F^{n-1} \text{ はファセット}} F^{n-1} \supset \cdots \supset \bigcup_{F^i \text{ は } i \text{ 次元面}} F^i \supset \cdots \supset \bigcup_{v \text{ は頂点}} \{v\} \supset \emptyset.$$

また, 同相写像 f がフィルトレーションを保つとは, すべての $0 \leq i \leq n$ に対して,

$$f(Q_i) = \bigcup_{F^i \text{ は } i \text{ 次元面}} F^i$$

が成り立つことをいう.

次に, 本研究の主対象である凸多面体上の locally standard T -pseudomanifold を定義する.

定義 3.4. $(m+n)$ 次元 **locally standard T -pseudomanifold** (X, \mathfrak{X}) とは, n に関する帰納法により次を満たすものとして定義される.

- $n = 0$ のとき, X は m 次元トーラスの非交和であり, 各成分は乗法による T 作用を持つ (X のコンパクト性により, これは有限個の T の非交和となる);
- $n > 0$ のとき, $0 \leq i \leq n$ に対して, 任意の $x \in X_{2i+(m-n)} \setminus X_{2(i-1)+(m-n)}$ に対し, 次で構成される 3 つ組 (U_x, L_x, φ_x) が存在する:
 1. $U_x \subset X$ は T 不変な x の開近傍;
 2. L_x は x のアイソトロピー部分群 $T_x \cong T^{n-i}$ が作用する $(2n - 2i - 1)$ 次元 locally standard T_x -pseudomanifold. L_x を x のリンクと呼ぶ (L_x は空でもよい);
 3. $\varphi_x: U_x \rightarrow (\Omega \times U(1)^{m-n}) \times \mathring{c}(L_x)$ は弱同変同相写像である. ここで, $\Omega \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^i$ は $U(1)^i$ 不変な開部分集合である. トーラス T^m は $(\Omega \times U(1)^{m-n}) \times \mathring{c}(L_x)$ 上に次の同型を通して作用するものとする:

$$T^m \cong T^m / T_x \times T_x \cong U(1)^{i+(m-n)} \times T^{n-i}.$$

ただし, $U(1)^{i+(m-n)}$ の $\Omega \times U(1)^{m-n}$ 上の作用は標準的であり,

$$\mathring{c}(L_x) = L_x \times [0, 1] / L_x \times \{0\}$$

上の T_x 作用は, 2 で述べた L_x 上の T_x 作用から誘導されるもので, $[0, 1]$ 成分上での作用は自明である.

locally standard T -pseudomanifold は適当なトーラス作用を備えた topological stratified pseudomanifold である. topological stratified pseudomanifold は特異点を許容する空間であり, その詳細については [Fri20] を参照されたい. 次の命題は, 空間が locally standard T -pseudomanifold という性質は, 弱同変同相で不变であることを示している.

命題 3.5. X および X' を連続な T 作用を持つ第二可算なコンパクト Hausdorff 空間とする. また, \mathfrak{X} および \mathfrak{X}' を軌道の次元によるフィルトレーションとする. (X, \mathfrak{X}) が locally standard T -pseudomanifold であると仮定する. このとき, X と X' が弱同変同相であれば, (X', \mathfrak{X}') もまた locally standard T -pseudomanifold である.

3.2 特性関手

次に, locally standard T -pseudomanifold の分類を行うため, 凸多面体上の特性関手について述べる. 以下では, X および X' を, n 次元凸多面体上の $(m+n)$ 次元 locally standard T^m -pseudomanifold とする. 定義の準備として, 次の命題を用意する.

命題 3.6. $\pi : X \rightarrow P$ を軌道射影とする. 面 $F \subset P$ に対して, \dot{F} で F の相対内部を表す. このとき, 次の 3 つが成り立つ.

- 面 $F \subset P$ に対して, $\pi^{-1}(\dot{F})$ のすべての点のアイソトロピー部分群 (部分トーラス) は一致する. 特に, π は各面に部分トーラスを割り当てる対応 $\lambda : F \mapsto T_F$ を定める.
- F の余次元が i のとき, $T_F \subset T$ は i 次元の部分トーラスである.
- (反変関手性). 面 F, G に対し, $F \subset G$ ならば, $T_F \supset T_G$ が成り立つ.

この命題をもとに, 凸多面体上の特性関手を次で定義する.

定義 3.7 (凸多面体上の特性関手). P を凸多面体とする. $\mathcal{F}(P)$ を P の面がなす順序集合とし, 圈とみなす. すなわち, 射 $F \rightarrow G$ は面の包含 $F \subset G$ により定める. $\mathcal{F}(P)^{\text{op}}$ をその反転圈とし, \mathcal{T} を T の部分トーラスがなす圈 (射は包含写像) とする. **凸多面体 P 上の特性関手**を, 関手

$$\lambda : \mathcal{F}(P)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{T}$$

であって, 次の条件を満たすものと定義する:

余次元 i の面 $F \in \mathcal{F}(P)$ に対して, $\lambda(F) \subset T$ は i 次元の部分トーラスである.

また, 組 (P, λ) を**特性対**と呼ぶ. 特に, 特性対 (P, λ) が命題 3.6 により軌道射影 $\pi : X \rightarrow P$ から定まるとき, X の**特性対**と呼ぶ.

続いて, **特性対の間の弱同型写像**を定義する.

定義 3.8. P と P' を凸多面体とする. 写像 $f : P \rightarrow P'$ は同相写像で, 同型関手 (順序同型写像) $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(P)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{F}(P')^{\text{op}}$ を誘導するとする. f が**特性対** (P, λ) と (P', λ') の間の弱同型写像であるとは, 自己同型 $\psi : T^m \rightarrow T^m$ が存在して, 次の図式が可換となることをいう (すなわち, 各面 F に対して, $\Psi \circ \lambda(F) = \lambda'(F)$ が成り立つ).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(P)^{\text{op}} & \xrightarrow[\cong]{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(P')^{\text{op}} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ \mathcal{T} & \xrightarrow[\cong]{\Psi} & \mathcal{T} \end{array}$$

ここで, Ψ は $T_F \in \mathcal{T}$ に対して, $\Psi(T_F) = \psi(T_F)$ で定義される同型関手である. (P, λ) と (P', λ') の間に弱同型写像が存在するとき, (P, λ) は (P', λ') と**弱同型**であるという. さらに, ψ が恒等写像である場合には, 弱同型写像を**同型写像**と呼び, 弱同型を**同型**と呼ぶ.

次の命題は、特性対が((弱)同型の差を除いて)一意的であることを示す。

命題 3.9. X と X' が(弱) T 同変同相であれば、それぞれの特性対 (P, λ) と (P', λ') は(弱)同型。

3.3 Locally standard T -pseudomanifold の標準モデル

P を n 次元凸多面体とし、 λ を P 上の特性関手とする。特性対 (P, λ) から構成される標準モデルについて述べる。

定義 3.10 (標準モデル). 標準モデル $X(P, \lambda)$ を、次の商位相空間として定義する：

$$X(P, \lambda) := P \times T^m / \sim.$$

ここで、同値関係 \sim は次のように定める。 $P \times T$ の 2 点 $(p, t), (q, s)$ が同値であるとは、 $p = q$ であり、かつ p を相対内部に含む面 F に対して、 $t^{-1}s \in \lambda(F)$ が成り立つときをいう。

標準モデルについて、次の定理が成り立つ。

定理 3.11. 標準モデル $X(P, \lambda)$ は locally standard T -pseudomanifold の構造を持つ。

この定理から、次の結果が従う。

定理 3.12. locally standard T -pseudomanifold のクラスは擬トーリック多様体(擬トーリック軌道体)および projective toric variety ([CLS11], [Jor98] を参照)のクラスを含む。

Proof. 擬トーリック多様体(擬トーリック軌道体)の同変同相型は、単純凸多面体上の標準モデルと同変同相である。また、projective toric variety についても、[CLS11] および [Jor98] により、凸多面体上の標準モデルと同変同相である(MacPherson の定理)。したがって、命題 3.5 と定理 3.11 より、主張が従う。□

注意 3.13. 軌道空間が凸多面体であることを仮定しない場合については、[KK26]においてより一般的な結果が示されている。すなわち、locally standard T -pseudomanifold のクラスは complete toric variety ([CLS11] を参照) およびコンパクトな locally standard T -manifold ([BP12] を参照) のクラスを含む([KK26, Theorem 14.1])。

3.4 主結果

主結果である分類定理を述べる。この定理は、凸多面体上の locally standard T -pseudomanifold の同変同相型が特性対によって分類されることを主張するものである。本定理は、[DJ91] および [PS10] の分類結果を拡張したものであり、特異点を許容する空間である topological stratified pseudomanifold にも適用可能である。

定理 3.14 (分類定理). X と X' を、それぞれ凸多面体上の locally standard T -pseudomanifold とする。このとき、次の 2 つの条件は同値である：

1. X の特性対 (Q, λ) と X' の特性対 (Q', λ') は (弱) 同型;
2. X と X' は (弱) T 同変同相.

証明の概要. (Q, λ) と (Q', λ') が (弱) 同型であるとする. このとき, それぞれの標準モデルが (弱) T 同変同相であることが示される ([KK26, Theorem 9.1] を参照):

$$X(Q, \lambda) \cong X(Q', \lambda'). \quad (1)$$

さらに, [Ayz18] のアイデアを用いて**モデル空間** $Y(Q, \lambda)$ を導入すると, T 同変同相

$$X(Q, \lambda) \cong Y(Q, \lambda) \cong X, \quad X(Q', \lambda') \cong Y(Q', \lambda') \cong X' \quad (2)$$

が示される. (1) と (2) を組合わせることで, X と X' が (弱) T 同変同相であることが従う.

逆は命題 3.9 から従う. \square

参考文献

- [Ayz18] Anton Ayzenberg, “Torus actions of complexity one and their local properties”. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (2018), Vol. 302, pp. 16-32.
- [BP12] Victor Buchstaber, Taras Panov, “Toric Topology”. Amer Mathematical Society (2012).
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck, “Toric Varieties”. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 124. American Mathematical Society (2011).
- [DJ91] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, Duke Math. J. **62**, (1991), no. 2, 417-451.
- [Fri20] Greg Friedman, “Singular intersection homology”. Vol. 33. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge (2020).
- [Jor98] Arno Jordan, “Homology and Cohomology of Toric Varieties”, Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik, Nr. 57 (1998).
- [KK26] Yuya Koike and Shintarô Kuroki, “Classification of locally standard T -pseudomanifolds over topological stratified pseudomanifolds”, arXiv:2511.10153, (2026).
- [Max19] L. G. Maxim, “Intersection Homology and Perverse Sheaves with Applications to Singularities”. Graduate Texts in Math. 281, Springer (2019).
- [PS10] Mainak Poddar, Soumen Sarkar, “On Quasitoric Orbifolds”. Osaka J. Math. 47 (2010), 1055-1076.
- [Zie96] Günter M. Ziegler, “Lectures on polytopes”. Springer-Verlag, GTM 152, (1996).